UNIVERSITÉ FRANÇOIS - RABELAIS
CAMPUS BLOIS

UFR Sciences et Techniques

IUP Blois
Licence S&T – 1°année

UE 102 – Informatique

Partie I — Architecture des ordinateurs

TRAVAUX DIRIGES

Enseignant **Jean-Yves ANTOINE** (Jean-Yves.Antoine AT univ-tours.fr)

Numération binaire

NUMERATION ET ARITHMETIQUE BINAIRE : EXERCICES

Exercice 1 — Un petit peu d'arithmétique binaire

1) Que vaut, en décimal, le nombre suivant, codé en hexadécimal : $<012D>_{16}$

2) Donnez la représentation, en binaire et en hexadécimal, des nombres relatifs suivants :

   - 114
   - 34
   - \- 45
   - 22
   - -61
   - -126

   Combien de bits devez-vous utiliser au minimum pour représenter ces nombres. Pourquoi est-il important de se poser la question en complément à deux ?

3) Réalisez alors les opérations suivantes en binaire (en vérifiant bien entendu votre résultat ensuite en décimal).

   - 34 + 22
   - 34 - 45
   - 34 - 22
   - -45 –61

Exercice 2 — Pour quelques bits de plus

On rappelle qu'à l'aide d'un octet, on peut représenter des entiers naturels compris entre 0 et 255.

1) Quelle plage d'entier naturels peut-on représenter à l'aide de mots de 16 bits ?

2) Même question, mais on désire cette fois représenter des entiers relatifs.

Calcul booléen

TRADUCTION EN LP : EXERCICES

Exercice 3 — Tables et simplification de formules booléennes

1) Donnez la table des fonctions booléennes suivantes

a) $\overline{a} + (b. (a + c))$ b) $(\overline{a} + b) . (c + \overline{b})$ c) $\overline{a} . (b + (a . c))$

2) En utilisant les différentes propriétés du calcul booléen (formules d'équivalence), simplifiez l'expression des formules ci-dessous et retrouver les tables précédentes.

Exercice 4 — Propriétés du calcul booléen...

Démontrez, en construisant les tables des fonctions concernées, les équivalences suivantes du calcul booléen :

- Associativité
- Distributivité
- Idempotence

Exercice 5 — Equivalence et formules de transformations

1) Montrez les équivalences suivantes en appliquant les formules de transformation du calcul booléen :

a) $\overline{a} + b \quad = \quad (a . b) + \overline{a}$
b) $a . b \quad = \quad a . (\overline{a} + b)$

2) Retrouvez ce résultat en établissant les tables des fonctions correspondantes.

Fonctions booléennes

QUESTIONS DE COURS

Exercice 6 — Calcul en binaire d'après A. Aho & J. Ullman, *Concepts fondamentaux de l'informatique*, **Dunod**

Dessinez les tables de Karnaugh et donnez les expressions des fonctions booléennes correspondant aux cas suivants :

1 — L'expression F est construite sur les variables a, b, c et d. Elle est vraie uniquement si un, deux ou trois parmi ces atomes sont vrais.

2 — L'expression F est construite sur les variables a, b, c et d. Elle est vraie uniquement si au plus deux parmi ces atomes sont vrais.

3 — L'expression F est construite sur les variables a, b, c et d. Elle est vraie uniquement si PQRS, vue comme un nombre binaire, a une valeur strictement inférieure à 10.

TABLEAUX DE KARNAUGH : EXERCICES CALCULATOIRES

Exercice 7 — Karnaugh et fnc D'après A. Aho & J. Ullman, *Concepts fondamentaux de l'informatique*, **Dunod**

On considère deux formules de la logique des propositions F1 et F2, construites sur les atomes a, b et c, dont on donne la table de vérité :

a	b	c	F1	F2
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

1 — En partant de ces tables, exprimez ces fonctions sous une forme normale conjonctive et disjonctive. Puis simplifiez les expressions obtenues à l'aide des formules d'équivalences du calcul booléen.

2 — Retrouvez ces résultats en appliquant la méthode des tableaux de Karnaugh.

Réponse (fnd) — $F1 \equiv a + (\overline{b} . c)$; $F2 \equiv (\overline{a} . \overline{c}) + (\overline{a} . b)$

3 — Donnez la synthèse en logique NAND ou NOR de ces fonctions booléennes.

Exercice 8 — C'est votre dernier mot, Jean-Pierre ? (contrôle continu 2001-2002 ; environ 10')

Lorsqu'il est demandé de mettre sous forme normale une fonction booléenne, deux méthodes sont envisageables : l'application directe des formules d'équivalence, ou la méthode des tableaux de Karnaugh. Suivant les cas, l'application d'une méthode se révèlera parfois nettement plus rapide que l'autre, ce qui peut s'avérer crucial dans un contrôle en temps limité… Alors, saurez-vous faire le bon choix sur les cas suivants ?

1 — Mettre sous fnd la formule suivante $(\overline{a} + b + \overline{c}) . (a + \overline{b} + \overline{c}) . (\overline{a} + \overline{b} + c)$

2 — Mettre sous fnc la formule suivante $(\overline{a} . \overline{c}) + (\overline{a} . \overline{b}) + (\overline{b} . \overline{c}) + (a.b.c)$

3 — Quelle méthode utiliseriez vous pour mettre sous fnc la formule suivante : $(\overline{a} . \overline{d}) + (\overline{e} . \overline{b}) + (\overline{b} . \overline{c})$

Exercice 9 — Tableaux de Karnaugh (contrôle continu 1998-1999)

1 — On considère une fonction booléennes F dépendant des variables logiques a, b, c et d. Cette fonction est définie par la tables de vérité suivante :

P	Q	R	S	F1
1	1	1	1	0
1	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

a. Donnez la forme normale disjonctive correspondant à F1 :

b. Donnez la forme normale conjonctive correspondant à F1 :

c. Donnez la synthèse de la fonction en logique NAND et NOR

Exercice 10 — Savez-vous diviser à la mode de chez nous ? (Contrôle continu 2002-2003)

Dans cet exercice, on représente les nombres entiers en binaire (base 2). Pour cela, on utilise quatre variables booléennes a, b, c et d correspondant à des bits (puissances de 2) décroissants. Par exemple, le nombre $<7>_{10}$ s'écrit en binaire $<0111>_2$ et sera représenté par les variables a = 0, b = 1, c = 1, d = 1.

1. Donnez l'expression de la fonction booléenne qui est vraie si le nombre représenté par a, b, c et d est divisible par 4 ou par 5. On donnera, au choix, cette formule sous forme normale conjonctive ou sous forme normale disjonctive.
2. Réaliser la synthèse de cette fonction en logique NAND ou NOR.

CALCUL BOOLEEN : PROBLEMES DE SYNTHESE

Exercice 11 — Les sœurs ennemies

Dans une même famille, Corinne (noté par la suite C) est militante communiste, Sophie (noté S) socialiste, Ursule (notée U) centriste de droite tendance UDF et Germaine (noté G) gaulliste de l'UMP (si, si, il reste des gaullistes à l'UMP). Une telle disparité d'opinion n'est pas sans poser problème lors des réunions de famille, d'autant que certaines rivalités — traditionnelles — sont également sensibles entre sœurs du même bord. Tout d'abord, la rencontre de sœurs respectivement de gauche et de droite donne traditionnellement lieu à des conversations plus qu'animées. Mais en plus, du fait des candidatures des frères ennemis Chirac / Bayrou à la prochaine élection présidentielle, Germaine et Ursule ne peuvent s'empêcher de se crêper le chignon en l'absence de toute sœur de gauche. A l 'opposé, en l'absence d'Ursule et de Germaine, Sophie et Corinne tentent tant bien que mal de respecter un pacte de non-agression qui maintient, à ce niveau familial, un semblant de cohésion qui n'est pas sans rappeler celui de la majorité « plurielle » actuelle.

Ne sachant comment voir leurs enfants sans que cela se traduise par une pagaille indescriptible, leurs parents décident de s'en remettre à la logique : ils désirent ainsi obtenir une expression F de la logique des propositions qui est vraie lorsque les soeurs en présence ne risquent pas de créer problème.

1. En utilisant la méthode des tableaux de Karnaugh, donner l'expression de F sous forme normale disjonctive la plus simple possible.

2. Donnez la synthèse de la fonction booléenne correspondant à ce problème dans la logique (NAND ou NOR) de votre choix.

Exercice 12 — Zone bleue … ou zone rouge ?

Le système judiciaire américain, où les avocats sont rémunérés au civil comme au pénal au pourcentage des sommes d'indemnisation que reçoivent les victimes, conduit à une judiciarisation croissante de la société. De même qu'en France, les agences immobilières viennent frapper à votre porte pour vous proposer de vendre votre maiso, même si vous n'avez aucune envie de déménager, les cabinets d'avocats américains sont en perpétuelle recherche de clients victimes « à l'insu de leur plein gré ». En dehors de certains procès modèles (voir par exemple les indemnités record que devra payer le « cow-boy Malboro » aux fumeurs atteints d'un cancer du poumon), on assiste ainsi à une explosion de procès pour les raisons les plus futiles. Récemment, au Montana, une petite fille de 6 ans a failli être condamnée à 3 ans de prison ferme pour avoir lancé un caillou à un camarade de classe qui l'embêtait. De même, une grand-mère a obtenu de larges indemnités auprès d'un fabricant de micro-ondes suite à la mort de son petit chat adoré : elle avait l'habitude de le faire sécher, après une promenade humide, dans le dit appareil ménager. Minou n'a pas résisté à une séance de séchage plus longue qu'à l'accoutumée. Le tribunal ayant jugé que le mode d'emploi ne mettait pas en garde contre l'utilisation dangereuse de l'appareil comme séchoir à chats, la compagnie fut ainsi condamnée, condamnation confirmée en appel. Face à cette explosion de procès, les sociétés rédigent désormais des modes d'emplois de plus en plus ubuesques, en essayant d'imaginer toutes les utilisations farfelues qui pourraient passer par la tête de leurs clients. Cette judiciarisation croissante commence à atteindre la France. J'en veux pour juge certaines notices jointes aux jouets de mes enfants. Quelques exemples véridiques :

- Ce jouet ne peut être utilisé que comme jeu,
- Cet appareil électrique ne fonctionne pas lorsque l'alimentation électrique est coupée ou que le bouton de marche arrêt est sur la position « arrêt »,
- Les pièces de ce jeu peuvent être dangereuses si elles sont utilisées comme projectile,
- Cette poupée ne peut avaler de nourriture,
- …

Face à ce type de situation, on imagine le règlement suivant, concernant un parking dans le centre de Manhattan. Dans ce parking, certaines places sont en « zone bleue », d'autres en « zone réservée ». La société gestionnaire a tenté de décrire tous les cas d'utilisation prévus, ce qui donne le règlement suivant :

- les personnels sont autorisés à stationner partout le dimanche
- les personnels sont autorisés à stationner partout pour le moins d'une heure en semaine
- le dimanche toute personne peut stationner plus d'une heure en dehors des places réservées
- les personnes non membre du personnel peuvent stationner le dimanche moins d'une heure en dehors des réservées et en semaine le temps qu'ils veulent dans les emplacements qui ne sont ni reservés ni en « zone bleue ».
- en zone bleue, hors de emplacements réservés, tout le monde peut stationner moins d'une heure
- en semaine, les personnels qui veulent stationner plus d'une heure peuvent le faire sur les emplacements réservés,
- les personnels peuvent stationner plus d'une heure en zone bleue sur les emplacements réservés.

Simplifiez ce règlement en l'exprimant sous la forme d'une fonction booléenne dont vous donnerez l'expression la moins complexe possible.

CP : Mise sous forme normale

FORME NORMALE : PROBLEMES

Exercice 13 — Système complet de connecteurs (contrôle continu 2001-2002 ; 10’ environ)

Sachant que {$\neg$,$\wedge$,$\vee$} est un système complet de connecteur, trouvez les relations d’équivalence qui démontrent que l’ensemble de connecteurs {$\neg$, $\Rightarrow$} est lui aussi complet. Comme nous le verrons plus tard dans notre étude des systèmes formels modélisant la logique des proposition, ce système a été proposé par Lukasiewicz.

Indication — Attention au sens des équivalences recherchées entre connecteurs…

Exercice 14 — Complétude et connecteurs logiques (examen 1997-1998 ; session de Septembre)

En logique, le terme "complétude" peut revêtir diverses acceptations. Il peut ainsi caractériser la capacité d'un système formel à démontrer toutes les conséquences logiques du langage sur lequel il est défini (théorème d'incomplétude de Gödel, par exemple). Il peut également servir à caractériser la difficulté algorithmique des problème de décidabilité. Ainsi, savoir si une expression logique est une tautologie constitue un problème **NP-complet**, c'est à dire faisant partie des problèmes que l'on ne sait résoudre qu'avec un temps exponentiel à la dimension du problème. Dans cet exercice, nous nous intéresserons à la troisième acceptation de ce terme, qui concerne les ensembles de connecteurs logiques.

Un ensemble de connecteurs est en effet dit complet si et seulement si toute expression logique peut s'exprimer uniquement à l'aide de ces opérateurs. Ainsi, nous avons vu en cours que l'ensemble { $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ } constituait un système complet de connecteurs pour la logique des propositions. Pour montrer qu'un ensemble de connecteurs logiques est complet, il faut et il suffit de montrer qu'on peut exprimer les connecteurs d'un autre système complet dans ce nouvel ensemble. Partant de { $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ }, on montre ainsi que { $\wedge$, $\vee$, $\neg$ }constitue un système complet en vertu des règles d'équivalences suivantes :

$$P \Rightarrow Q \quad \equiv \quad \neg P \vee Q$$

$$P \Leftrightarrow Q \quad \equiv \quad (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$

1 — On considère ici l'opérateur NAND (NON-ET) noté $\uparrow$ défini comme la négation de la conjonction :

$$P \uparrow Q \quad \equiv \quad \neg(P \wedge Q)$$

Montrez que l'ensemble { $\uparrow$ } réduit à ce seul opérateur constitue un système complet. Cet opérateur est de première importance en informatique et en électronique, puisqu'il permet à lui seul de représenter l'ensemble des fonctions logiques nécessaire à la mise en œuvre des circuits des ordinateurs.

Indication — Montrer qu’un système de connecteur est un système complet revient à montrer que tout connecteur quelconque peut se réécrire sous la forme d’une combinaison de connecteurs du système ... et non l’inverse !

2 — On considère maintenant l'opérateur NOR (NON-OU) noté $\downarrow$ et défini comme la négation de la disjonction. Montrez que l'ensemble { $\downarrow$ } constitue lui aussi un système complet de connecteurs.